双曲的多様体と幾何学的ディオファントス問題

AUTHOR(S):
野口, 潤次郎

代数幾何学シンポジウム記録
1991年度　pp.42-50

双曲的多様体と幾何学的
ディオファントス問題

東京工業大学理学部　野口潤次郎
(Junjiro Noguchi)

序.　本稿は1991年11月5日より8日にかけて城崎で催された代数幾何学シンポジウムでの筆者の講演にもとづくものです. 動機は, "ディオファントス幾何学" といったものがあって, これを数体上で考えれば代数多様体上の有理点の問題になり, 関数体上で考えればこれは幾何学的問題になり, その双方のアナロジーを追ってみるのは面白いのではなかろうかということです. おおまかな表を次頁に書きました. 対応するものが互いに定理(結果)であったり, 定理と予想, 予想対予想の場合もあります. このような問題意識の持ち方は S. Lang に負う所が大であります. 筆者は既にこのテーマについていくつかの論説を書いております([N1, N2, MN]等). 詳しくは文献にある論文等をみていただくこととして, ここでは講演の中心となったいくつかの結果を紹介す

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">値分布理論</th><th colspan="4">Diophantine 幾何学</th></tr>
<tr><th></th><th>Nevanlinna 理論</th><th>小林双曲的幾何</th><th></th><th colspan="2">Mordell 予想</th><th>Shafarevich 予想</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1次元</td><td rowspan="2">Nevanlinna (1920)
Ahlfors (1930~,
第1回フィールズ賞)
Chern (1960~)</td><td rowspan="2">Schwarz
Pick
Hurwitz
Ahlfors</td><td>数体</td><td>Faltings (1983)
Vojta Conj. (1985-6)</td><td></td><td>Faltings (1983)</td></tr>
<tr><td>関数体</td><td>Manin (1963)
Grauert (1965)</td><td>de Franchis の定理 (1890)
Severi の定理</td><td>Parshin (1968)
Arakelov (1971)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">高次元化
一般化</td><td rowspan="2">H. Cartan (1930~)
Weyl-Ahlfors
Stoll
Griffiths, Shiffman
藤本, 野口
Siu
相原-野口 (1991)</td><td rowspan="2">Grauert-Reckziegel
小林, 落合
Kwack, Kiernan
野口 (拡張·収束定理)</td><td>数体</td><td>Weil 予想
Lang 予想 (1974)
abc 予想
Faltings (1991, Abelian var.)</td><td>Arithmetic Intersection
理論 (Arakelov 理論)</td><td>Faltings (1983, Abelian varieties)</td></tr>
<tr><td>関数体</td><td>Lang 予想 (1974)
Riebesehl (1981)
Szpiro, Raynaud
野口 ('81, '85, '92)
Dechamps, Maehara</td><td>Lang 予想 (1974)
小林-落合, 対馬
野口-砂田, 浦田
Kalka-Shiffman-Wong
Maehara, Zaidenberg
Horst, 野口.</td><td>Faltings (1983, Abelian varieties)
野口 (1988), Peters, Saito-Zucker
宮野-野口 (1991)

without deg. cond.
Nadel (1989)
野口 (1991)</td></tr>
</table>

ることとします.

1. Mordell予想について

ここでは関数体上のMordell予想の高次元版を考えます. 値分布の方では小林双曲的幾何が関係する部分です. 以下 X, Yを複素解析空間とし, Mer(X, Y) でXからYへの有理型写像の全体を表わし, Merdom(X, Y)でXからYへの支配的な有理型写像の全体を表わす. 次の定理は1974年にS. Langにより出された予想です.

定理(1.1)([N4]). X, Yをコンパクトとし, Yは双曲的であるとする. このときMerdom(X, Y)は有限集合である.

部分的な解決は表のMordell予想の右側最下段にある人々によって与えられていた. $\dim Y=1$ のときはYが双曲的であることとYの種数が2以上であることは同値であるから これは, いわゆるde Franchisの定理の一般化である. 証明は, Merdom(X, Y)が無限個の元を含むとして 順次reductionをしながら矛盾を導くのであるが, その最後のステップでは宮岡一森(Ann. Math. 124(1986))による有理曲線の存在定理が使われる. 詳しくは[N4]をみられたい.

さて, 定理(1.1)と筆者の以前の結果を合せると次の関数体上のMordell予想の高次元版が得られる.

定理(1.2)([N_4]). $\pi: \mathcal{X} \to B$ をプロパーなファイバー

空間とし，ファイバー空間としてのコンパクト化 $\bar{\pi}: \bar{\mathcal{X}} \to \bar{B}$ を持つとする．次を仮定する．

(i) 全ての $t \in B$ に対し，$\mathcal{X}_t = \pi^{-1}(t)$ は双曲的である．

(ii) $\partial B = \bar{B} \setminus B$ に沿って $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} B$ は $\bar{\mathcal{X}} \xrightarrow{\bar{\pi}} \bar{B}$ に双曲的に埋込まれている．

このとき，$\mathcal{X}$ は自明なファイバー部分空間 $\mathcal{Y}_j \cong Y_j \times B$, $1 \leq j \leq l$, を高々有限個含み，$\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} B$ の有理型切断は有限個を除いて，それら自明なファイバー部分空間 $\mathcal{Y}_j$ の定切断である．

これもやはり S. Lang により 1974 年に予想されたものである．上述の条件 (ii) は $\dim \mathcal{X}_t = \dim B = 1$ のときは必要でない．よってこれは Manin - Grauert により解決された関数体上の曲線に対する Mordell 予想を含む．$\mathcal{X}_t$ が双曲的になる例としては，$\mathcal{X}_t$ が非特異で $\Omega^1(\mathcal{X}_t)$ が ample の場合，またアーベル多様体の部分多様体で，アーベル部分多様体の平行移動を含まないものなどがある．

2. Shafarevich 予想について

これは Faltings の Mordell 予想の解決の論法のアナロジーとしても関連の深いものである．関数体上では Parshin - Arakelov の定理が最初の結果である．これは，基礎になる曲線 C（コンパクト）とその上の有限個の点 P_i, $1 \leq i \leq N$,

整数 $g \geqq 2$ をデーターとして与え，C 上の種数 g の曲線族でモジュライが真に変化し，高々 P_i, $1 \leqq i \leqq N$, で退化するものの全体 $\mathbb{M}(g; C; \{P_i\}_{i=1}^N)$ が有限集合であることを主張する．関数体上でも数体上でも，これが分ればMordell予想が従うことはParshinにより分っていた．さてこれを値分布理論の観点からみると次のようになる．大まかに言って，$\mathbb{M}(g; C; \{P_i\}_{i=1}^N)$ の元をとることは $B = C \setminus \{P_i\}_{i=1}^N$ から種数 g の曲線のモジュライ空間 $\mathbb{M}(g)$ への非定数正則写像 $f: B \to \mathbb{M}(g)$ を考えることと同値である．$\mathbb{T}(g)$ をタイヒミューラー空間，$\Pi(g)$ をタイヒミューラー群とすれば，$\mathbb{M}(g) = \mathbb{T}(g)/\Pi(g)$ で $\mathbb{T}(g)$ は完備双曲的である．結局，B から $\mathbb{M}(g)$ への非定数正則写像の全体 $\mathrm{Hol}(B, \mathbb{M}(g))$ の有限性を言えばよいことになる．完備双曲的複素空間への正則写像の一般論より，$\mathrm{Hol}(B, \mathbb{M}(g))$ はコンパクトな複素空間のZariski開集合であることが示される．$\dim \mathrm{Hol}(B, \mathbb{M}(g)) = 0$ を示すには他の方法が必要である．これには，コホモロジーの消滅(Arakelov)，最大値原理(志賀-今吉)，調和写像の理論(Schoen-Yau)などの方法がある．

さて同様のことを，曲線族だけでなく，偏極アーベル多様体の族や，K3曲面の族などについて考えてみるのも興味深

い. そのような多様体のモジュライ空間は有界対称領域$\mathbb{D}$の商$\mathbb{D}/\Gamma$で表わされるから, $\mathrm{Hol}(B, \mathbb{D}/\Gamma)$の構造を調べることになる. ここではBとしてはコンパクト, ケーラー多様体のZariski開集合を取れる(代数性は必要ない).
まず, $\mathrm{Hol}(B, \mathbb{D}/\Gamma)$はコンパクト複素空間のZariski開集合であることが分る. $Z_1 \subset \mathrm{Hol}(B, \mathbb{D}/\Gamma)$を一つの連結成分とする. $\dim Z_1 > 0$とする. するとある有界対称領域$\mathbb{D}_1$と離散群$\Gamma_1 \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{D}_1)$があり, $Z_1 = \mathbb{D}_1/\Gamma_1$と表わされ, $x \in B$に対し

$$\varphi_x : f \in \mathbb{D}_1/\Gamma_1 \longrightarrow f(x) \in \mathbb{D}/\Gamma$$

は全測地的, プロパーな正則挿入である. さてもとのBは$x \in B \longrightarrow \varphi_x \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_1/\Gamma_1, \mathbb{D}/\Gamma)$により正則に$\mathrm{Hol}(\mathbb{D}_1/\Gamma_1, \mathbb{D}/\Gamma)$の中に写される. その像を含む$\mathrm{Hol}(\mathbb{D}_1/\Gamma_1, \mathbb{D}/\Gamma)$の連結成分$Z_2$をとると, 前と同様に$Z_2 = \mathbb{D}_2/\Gamma_2$と表わされ, 自然な取値写像

$$\Phi : (\mathbb{D}_1/\Gamma_1) \times (\mathbb{D}_2/\Gamma_2) \longrightarrow \mathbb{D}/\Gamma$$

を得る. 最終的に次の定理を得る.

定理(2.1)([MN]). 上述の$\Phi : (\mathbb{D}_1/\Gamma_1) \times (\mathbb{D}_2/\Gamma_2) \to \mathbb{D}/\Gamma$は全測地的, プロパーな正則挿入である.

$\mathbb{D}/\Gamma$が偏極K3曲面や偏極アーベル多様体のモジュライ空間の場合には, Peters, 齋藤(政), Zucker 等によるΦの

詳しい研究がある.

3. レベル構造を持つ偏極アーベル多様体族について

これは表の最も右下にある所と最も左下にある所についての話しである. 前節では基礎空間の上に, 例えば主偏極アーベル多様体の族を考え, それが退化することを許される場所を基礎空間上に指定した. この退化条件を付さなければ対応するモジュライ空間は大きくなり過ぎ意味ある構造を結論することは望めなくなる. ここではその代りにレベル構造を考えることにする. Rを非特異複素射影的代数多様体とし, $A \to R$ をその上の主偏極アーベル多様体の族(真にモジュライの動くもの, 退化は許す)で $\dim_R A = g$ とする. そのレベルn-構造とは $2g$ 個の有理切断 $\{x_i\}_{i=1}^{2g}$ で, 一般の点 $t \in R$ で $\{x_i(t)\}_{i=1}^{2g}$ が A_t の n 分点を生成しているものとする. $A \to R$でレベルn-構造を持つものの全体を $\mathcal{A}(g; n; R)$ で書く. Ω を R 上の Hodge 計量全体の上を走らせ

$$\nu(R) = \inf\left\{\int_R c_1(K_R) \wedge \Omega^{r-1}\right\} \geq -\infty$$

とおく ($r = \dim R$). $k(g)$ で重さ k の Siegel 保型式が共通零点を持たなくなるような k の最小値とする. このとき次の定理が成立する.

定理(3.1)($[N_3]$). $g \geqq 5$ とする(技術的仮定).

i) $n > gk(g)/2$ ならば $A(g, n, R)$ は有限次元の準射影的代数多様体である.

ii) $n > (1 + \max\{0, \gamma(R)\})gk(g)/2$ ならば, $A_{deg}(g, n, R) = \phi$.

ここで $A_{deg}(g, n, R)$ とは $A(g, n, R)$ の元で真に退化ファイバーを持つものの全体を表わす. 次に注意しよう.

命題(3.2). $\gamma(R) \leqq 0$ ならば $A(g, n, R) = A_{deg}(g, n, R)$.

Nadel (Ann Math. 129 (1989)) は R が種数 $\leqq 1$ の曲線のとき, 上述の ii) に相当することを示しています. 証明は R 上で Nevanlinna 理論を展開するもので, これを有理型写像 $f : \mathbb{C}^m \to \overline{\mathbb{D}/\Gamma}$ (今の場合は $\mathbb{D}$ は Siegel 上半空間だが, 一般の有界対称領域でもよく, $\overline{\mathbb{D}/\Gamma}$ は $\mathbb{D}/\Gamma$ のトロイダルコンパクト化を表わす) に対して考えると, Nevanlinna の第2主要定理型の不等式 ([AN])

$$K\{T_f(r, [D]) + T_f(r, K_{\overline{\mathbb{D}/\Gamma}})\}$$
$$\leqq N(r, \mathrm{Supp}\, f^*D) + O(\log r) + O(\log^+ T_f(r, [D]))\|$$

を示すのと同じことになる. ここで D は $\mathbb{D}/\Gamma$ のコンパクト化の為に加える因子の全体である. Nevanlinna の古典的第2主要定理も, $\mathbb{D}$ として $\mathbb{C}$ の上半平面, Γ を適当な Fuchs 群にとることにより導かれる. 詳しくは [AN], $[N_3]$ を見よ

れない。

参考文献

[AN] Y. Aihara–J. Noguchi, Value distribution of meromorphic mappings into compactified locally symmetric spaces, Kodai Math. J. 14 (1991), 320–334.

[MN] T. Miyano–J. Noguchi, Moduli spaces of harmonic mappings and holomorphic mappings and Diophantine geometry, Prospects in Complex Geometry, Proc. Katata/Kyoto 1989, Lect. Notes in Math. 1468, pp. 227–253, Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.

[N1] 野口潤次郎, 双曲的多様体理論とDiophantus幾何学, 数学 41 (1989), 320–334.

[N2] J. Noguchi, Hyperbolic manifolds and Diophantine geometry, Sugaku Expositions, 4 (1991), 63–81.

[N3] ——, Moduli space of Abelian varieties with level structures over function fields, Int. J. Math. 2 (1991), 183–194.

[N4] ——, Meromorphic mappings into compact hyperbolic complex spaces and geometric Diophantine problems, to appear in Int. J. Math 3 (1992).